Notación:

- $\mathbf{V} \equiv \vec{V}$ (Significa que cuando pongo una variable en negrita equivale a una magnitud vectorial)
- $\mathbf{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$
- r es el radio en coordenadas cilíndricas (Es diferente al r de arriba, ya que este no está en negrita).
- $\mathbf{r}$ es el punto campo y $\mathbf{r}'$ es el punto fuente.

Enunciado

Dos distribuciones planas paralelas de carga están separados una distancia d = 0.5 m. Hallar el campo y la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos pertenecientes a un eje perpendicular a los planos cuando:

1. Ambos planos tienen la misma densidad de carga superficial uniforme σ. Evaluar para el caso particular $\sigma = 2\,\mu\mathrm{C\,m^{-2}}$
2. Un plano tiene $-\sigma$ y el otro σ.

Dibujar líneas de campo representativas en cada caso y graficar la diferencia de potencial en función a la distancia perpendicular a los planos respecto de un punto arbitrario.

Índice

1. Dos planos con misma densidad de carga superficial σ

Se tienen dos placas paralelas infinitas como la que se muestran en la siguiente figura:

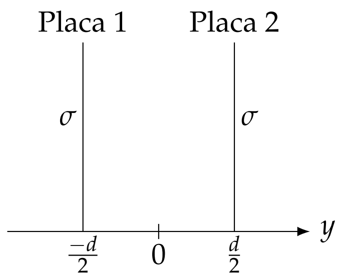

Figura 1 – Esquema de la distribución de carga

Se observa que se puede aplicar el principio de superposición. Entonces, para cada placo vamos a tener un campo eléctrico $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ dado por las siguientes expresiones:

$$\mathbf{E}_1(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\text{sgn}(y + \frac{d}{2}) \cdot \hat{j}, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}_2(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\text{sgn}(y - \frac{d}{2}) \cdot \hat{j}. \tag{2}$$

Hagamos el análisis de la superposición de los campos. Para ello, dibujemos la lineas de campo:

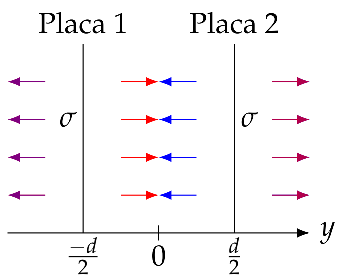

Figura 2 – Lineas de campo

donde las lineas de campo rojas corresponden al campo eléctrico generado por la placa 1 y las azules corresponden a la placa 2. Ver que, por ejemplo, para $y \succ \frac{-d}{2}$, el campo $\mathbf{E}_1$ es positivo, tal como dice la ecuación (1). Finalmente, a partir de la Figura 2 debería quedar claro que entre las placas el campo total es nulo (ambos campos tienen misma magnitud pero sentidos opuestos), mientras que por fuera de las placas, el campo se suma vectorialmente. Entonces:

$$\mathbf{E}_T(y) = \begin{cases} \frac{-\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{j}, & y \prec \frac{-d}{2} \\ \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{j}. & y \succ \frac{d}{2} \end{cases} \tag{3}$$

Calculado el campo, recordar que $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$, por lo que el campo apunta en la dirección hacia donde decrece el potencial (recordar como es el gradiente de un campo). Por otro lado, podemos razonar fácilmente como tiene que ser el trabajo realizado por la fuerza externa. Dicho trabajo, por definición es:

$$W_{ext} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}. \tag{4}$$

Ahora, sabemos que la fuerza externa siempre se opone a la dirección del campo (y por lo tanto a la fuerza eléctrica). Entonces $\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}_E$, por lo tanto:

$$W_{ext} = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_E \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}. \tag{5}$$

Pero sabemos que $F_E = qE$ y $\frac{W}{q} = V$. Por lo tanto, el potencial podemos calcularlo como:

$$V(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}_0) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}, \tag{6}$$

donde $\mathbf{r}_0$ es el punto de referencia del potencial. En nuestro caso, observar que entre las placas el campo es nulo. Por lo tanto, definimos como punto de referencia $y_0 = 0$. Luego,

$$V(y) - V(0) \underbrace{=}_{V(0)=0} V(y) = -\int_0^y E(y)\mathrm{d}y = -\int_{\frac{-d}{2}}^{y} E(y)\mathrm{d}y = \int_{\frac{-d}{2}}^{y} \frac{\sigma}{\epsilon_0}\mathrm{d}y, \tag{7}$$

$$V(y) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(y + \frac{d}{2}), \ \ y \prec \frac{-d}{2}, \tag{8}$$

donde se tomó que $V(0) = 0$[1]. Ver que entre 0 y $\frac{-d}{2}$ el campo es nulo, por lo tanto la integral termina siendo desde $\frac{-d}{2}$. Además, ver que el signo del diferencial de longitud ya está contemplado en los límites de la integral. Para el caso en que $y \succ \frac{d}{2}$:

$$V(y) = -\int_0^y E(y)\mathrm{d}y = -\int_{\frac{d}{2}}^{y} E(y)\mathrm{d}y = -\int_{\frac{d}{2}}^{y} \frac{\sigma}{\epsilon_0}\mathrm{d}y, \tag{9}$$

$$V(y) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(y - \frac{d}{2}), \ \ y \succ \frac{d}{2}. \tag{10}$$

Entonces la función potencial es:

$$V(y) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0}(y + \frac{d}{2}), & y \prec \frac{-d}{2} \\ 0, & \frac{-d}{2} \prec y \prec \frac{d}{2} \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(y - \frac{d}{2}). & y \succ \frac{d}{2} \end{cases} \tag{11}$$

El grafico de potencial se muestra a continuación (tomando d=0.5 m):

[1]Observación: $V(0)$ puede tomar cualquier valor constante C, tomé el valor igual a 0 por comodidad. Lo mismo sucede para la parte 2.

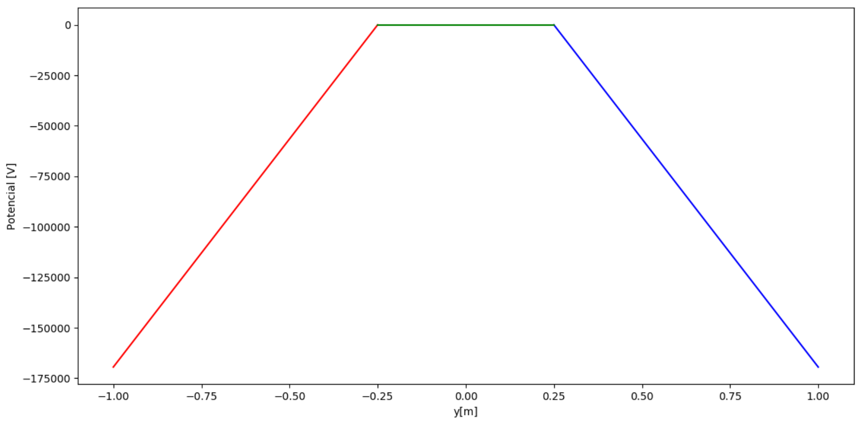

Figura 3 – Función potencial.

Ver que efectivamente, las lineas de campo van desde una zona de mayor a potencial a otra de menor potencial (van de 0 a valores negativos).

2. Dos planos, uno con densidad de carga superficial σ y el otro $-\sigma$

Para el caso en que las placas tienen el mismo σ pero de signo opuesto, habrá campo solo dentro de las placas. Esto se puede deducir a partir de la siguiente figura:

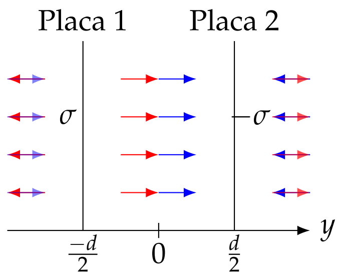

Figura 4 – Lineas de campo

donde nuevamente las lineas de campo rojas corresponden a la placa 1 y las azules a la placa 2. Ver que el campo es distinto de 0 solo entre las placas (por fuera se cancelan). Por lo tanto, el campo total será:

$$\mathbf{E}_T(y) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \hat{j}, \quad \frac{-d}{2} \prec y \prec \frac{d}{2}. \tag{12}$$

Luego, para el cálculo del potencial, definimos como punto de referencia $y = y_0$, siendo y_0 un punto arbitrario mayor a $\frac{d}{2}$, ya que en dicho punto el potencial es 0 (el campo es nulo). Entonces:

$$V(y) - V(y_0) \underbrace{=}_{V(y_0)=0} V(y) = -\int_{y_0}^{y} E(y)\mathrm{d}y = -\int_{\frac{d}{2}}^{y} E(y)\mathrm{d}y = -\int_{\frac{d}{2}}^{y} \frac{\sigma}{\epsilon_0}\mathrm{d}y, \tag{13}$$

$$V(y) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(y - \frac{d}{2}), \quad \frac{-d}{2} \prec y \prec \frac{d}{2}. \tag{14}$$

Ver además que para $y \prec \frac{-d}{2}$ el campo es nulo, y por lo tanto

$$V(y) = -\int_{\frac{d}{2}}^{y} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathrm{d}y = -\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{-d}{2}} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathrm{d}y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \tag{15}$$

Entonces la función potencial es:

$$V(y) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} d, & y \prec \frac{-d}{2} \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0}(\frac{d}{2} - y), & \frac{-d}{2} \prec y \prec \frac{d}{2} \\ 0. & y \succ \frac{d}{2} \end{cases} \tag{16}$$

El grafico de potencial se muestra a continuación (tomando d=0.5 m):

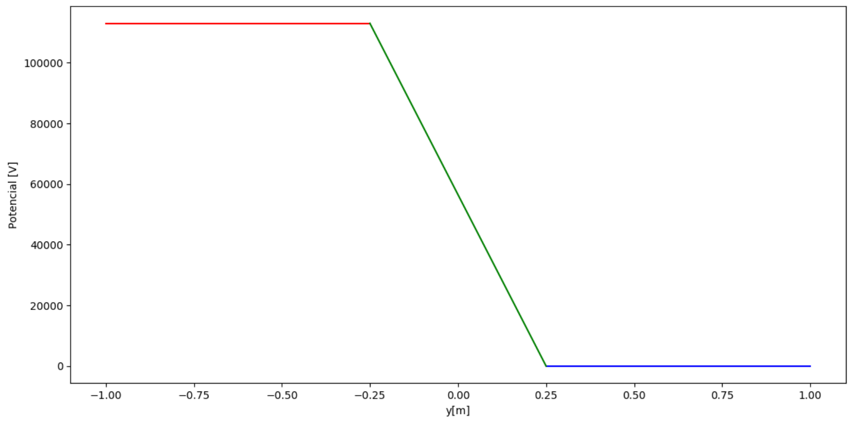

Figura 5 – Función potencial.

Ver que efectivamente, las lineas de campo van desde una zona de mayor a potencial a otra de menor potencial (van de un valor positivo a 0).